

Glättung dreidimensionaler Bewegungsdaten

Denis Martin

Zusammenfassung — Die vorliegende Ausarbeitung befasst sich mit der Glättung von Signaldaten für die Analyse von Bewegungen. Einführend werden verschiedene Fehlermodelle und deren Minimierung sowie Besonderheiten der Mehrdimensionalität der Daten diskutiert. Danach werden Methoden zur Glättung bzw. Filterung der Daten vorgestellt und bewertet.

Stichworte — mehrdimensionale Signaldaten, systematische Fehler, unkorreliertes (weißes) Rauschen, digitale Filter, Spline-Glättung.

I. EINLEITUNG

Zur Untersuchung menschlicher Bewegungsabläufe ist es notwendig, reale Bewegungen zu digitalisieren, um sie im anschließenden Modellierungsprozess am Rechner auf ein entsprechendes Modell übertragen zu können. Wie bei jedem anderen Digitalisierungsvorgang treten auch hier Fehler auf, die es zu minimieren gilt. Dabei bedient man sich größten Teils bekannter Techniken, allerdings mit einem besonderen Augenmerk auf die spezifischen Charakteristika von Bewegungsdaten. Diese liegen insbesondere in ihrer Mehrdimensionalität.

II. VORÜBERLEGUNGEN

A. Fehlerarten

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen zwei verschiedenen Fehlerarten: systemabhängige und unkorrelierte Fehler.

A.1 Systemabhängige Fehler

Systemabhängige Fehler sind z.B. Einschränkungen, die man durch das verwendete Modell erhält. Bei einem Skelettkörpermodell (*rigid body model*) sind beispielsweise einzelne Gelenke starr miteinander verbunden. Führt nun das zu untersuchende Subjekt eine Bewegung aus, die mit dem gegebenen Modell nicht dargestellt werden kann, so führt das zu Abweichungen vom Original und somit zu (bewegungsabhängigen) Fehlern. Ein weiteres Beispiel für Fehler, die abhängig vom Signal unterschiedlich stark auftreten, sind nichtkompensierte Verzerrungen des Kamerabilbes oder anderer Messvorrichtungen.

Um systematische Fehler zu minimieren, muss man an deren Ursache ansetzen. Sind es wie eben erwähnt Modell einschränkungen, ist zu überlegen, ob es nicht sinnvoll ist, dass Modell zu erweitern (und damit den Rechenaufwand zu erhöhen) bis eine für den Zweck notwendige Fehlertoleranz erreicht ist. Verzerrungen durch Messvorrichtungen können durch eine sorgfältigere Auswahl von Messinstrumenten (z.B. metrische Kameras) oder vorherigen Simulationstudien verringert werden. In diesen Fällen kann man die gemessenen Signale entzerren, bevor sie weiterverarbeitet werden.

A.2 Unkorrelierte Fehler

Unkorrelierte Fehler treten unabhängig vom Signal während des gesamten Zeitraums des Signalverlaufes und meist über ein breites Spektrum auf. Oft handelt es sich dabei um Aufnahmerauschen (weißes Rauschen – *white noise*) durch Messgeräte. Diese Art von Fehlern wirkt sich additiv auf das Signal aus und hat gewisse stochastische Eigenschaften, wie z.B. dass der Erwartungswert bei Null liegt und die Kovarianzmatrix N des Rauschens eine Näherung an die Einheitsmatrix I ist (Identität). Zur Minimierung dieser Fehler bieten sich verschiedene Glättungsverfahren im Zeit- und Frequenzbereich an, über die diese Ausarbeitung einen Überblick schaffen will.

B. Wahl der Abtastfrequenz

Damit das Ursprungssignal möglichst genau aus den digitalisierten Daten rekonstruiert werden kann, muss die Abtastfrequenz richtig gewählt werden. Nach dem Abtasttheorem von Nyquist muss die Abtastfrequenz mindestens das doppelte der höchsten Signalfrequenz betragen, die korrekt digitalisiert werden soll. Die halbe Abtastfrequenz wird als Nyquistfrequenz ω_N bezeichnet. Die Frequenzen zwischen der Nyquistfrequenz und der Abtastfrequenz werden beim Abtasten in das Nyquistband $-\omega_N \leq \omega \leq \omega_N$ verlegt (Aliasing). Aus diesem Grund kann es insbesondere bei hochfrequentem Rauschen sinnvoll sein, die Abtastfrequenz noch höher zu wählen, da dann der Rauschanteil, der ins Nyquistband verlegt wird, geringer ausfällt und somit das Signal nicht noch weiter (additiv) verändert wird (Abbildung 1).

Die Wiederholungen des Spektrums in den digitalisierten Daten an den ganzzahligen Vielfachen von ω_N liegt an der Abtastung selbst: Zwischen den Abtaststellen kann zwar mit hohen und niedrigen harmonischen Schwingungen interpoliert werden, an den Datenpunkten aber haben nur die Frequenzen des Nyquistbandes Einfluss.

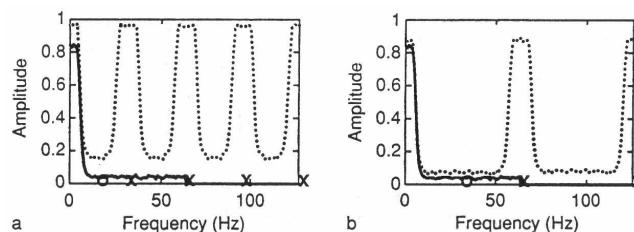


Abbildung 1. Aliasing: Bild (a) und (b) zeigen ein Signal vor dem Abtasten (durchgezogene Linie) und nach dem Abtasten (gepunktete Linie). Die Abtastfrequenz und deren Vielfache sind mit „x“, die Nyquistfrequenz mit „o“ gekennzeichnet.

C. Mehrdimensionale Signaldaten

Signaldaten sind in der Bewegungsanalyse typischerweise mehrdimensional, da man 3D-Koordinaten mehrerer Markierungen (*landmarks*), die man beispielsweise durch Kameraaufnahmen rekonstruiert hat, auf ein Modell projiziert. Meist sind diese Markierungen zusätzlich noch in Relation zu einander gesetzt, soweit dies sinnvoll ist (z.B. wenn unveränderliche Abstände zwischen zwei Markern bekannt sind).

Die Frage ist nun, in welchem Stadium des Prozesses eine Glättung der verrauschten Signaldaten durchgeführt werden sollte. Um dies zu entscheiden, ist es wichtig zu wissen, welche Auswirkungen nichtlineare Transformationen auf die Signaldaten haben. In Abbildung 2b sieht man das Spektrum verrauschter Daten bevor und nachdem sie im Zeitbereich einer nichtlinearen Transformation (in diesem Fall Quadrierung) unterzogen wurden: Die Eigenschaften des Rauschens, dass es sich additiv mit dem Signal überlagert, ist offensichtlich verloren gegangen.

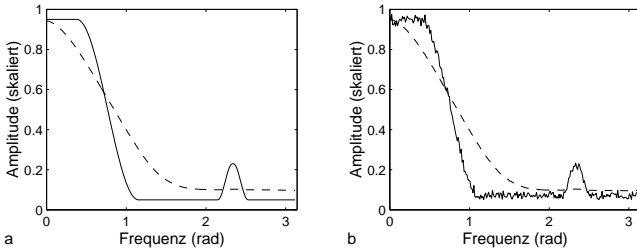


Abbildung 2. Auswirkungen nichtlinearer Transformationen: Spektrum idealer Daten (a) und verrauschter Daten (b) bevor (durchgezogene Linie) und nachdem (gestrichelte Linie) die Daten im Zeitbereich quadriert wurden.

Während die 3D-Rekonstruktion überwiegend linear ist, handelt es sich bei der Projektion der Daten auf ein Skelettmodell um hochgradig nichtlineare Berechnungen. Allgemein sollte die Glättung der Daten also vor diesen nichtlinearen Transformationen durchgeführt werden. Jedoch sollte man sie auch nicht zu früh im Verarbeitungsprozess anbringen, da sonst eventuell nutzbare Informationen verloren gehen: Bei der 3D-Rekonstruktion beispielsweise können Residuenfehler Aufschluss darüber geben, ob es sich um stochastische (unkorrelierte) oder systematische (korrelierte) Fehler handelt.

D. Differenzierungsprobleme

Von großem Interesse sind in der Bewegungsanalyse die zeitlichen Ableitungen der Signaldaten, da durch diese z.B. die Geschwindigkeit und Beschleunigung einzelner Skelettpunkte bestimmt werden können. Allerdings wirkt sich vorhandenes Rauschen besonders stark auf genau diese aus. Stellt man sich das Signal als Summation von Sinusschwingungen vor, wird deutlich, welche Auswirkung hochfrequentes Rauschen auf die Ableitungen hat. Es gilt:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n a_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (1)$$

$$x'(t) = \sum_{i=0}^n \omega_i a_i \cos(\omega_i t + \phi_i), \quad (2)$$

$$x''(t) = \sum_{i=0}^n -\omega_i^2 a_i \sin(\omega_i t + \phi_i). \quad (3)$$

In jeder Ableitung erhöht sich die Amplitude a_i um den Faktor der jeweiligen Frequenz ω_i , wie Abbildung 3 nochmals im Frequenzbereich verdeutlicht. Im Zeitbereich schlägt sich dies in einer starken Oszillation der Ableitungen des Signals nieder.

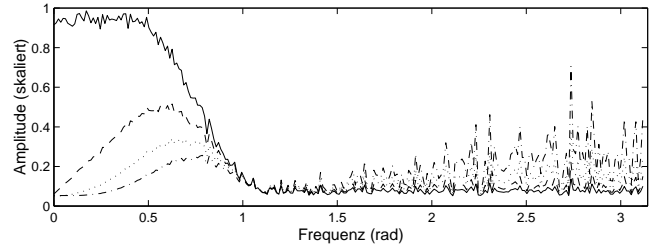


Abbildung 3. Spektrum eines verrauschten Signals (durchgezogene Linie) und deren zeitlichen Ableitungen erster (gestrichelte Linie), zweiter (gestrichelpunktete Linie) und dritter (gestrichelpunktete Linie) Ordnung.

Um dieses Verhalten der Ableitungen zu vermeiden, bietet sich eine vorherige Tiefpassfilterung an. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis (*signal-to-noise ratio* – SNR) kann hier eine geeignete Sperrfrequenz (*cut-off frequency*) liefern, nämlich genau dann, wenn es kleiner als 1 ist. Diese wird für das Signal und alle Ableitungen gleichermaßen verwendet. Jedoch ist dieses Kriterium nicht immer anwendbar: Insbesondere bei schnellen Bewegungswechseln können hier Spitzenwerte (*peaks*) im hochfrequenten Bereich des Nutzsignals auftreten, die möglichst bewahrt werden sollen. Darauf muss anwendungsspezifisch geachtet werden. Einige häufig verwendete Tiefpassfilter aus der digitalen Signalverarbeitung werden in Abschnitt IV-A vorgestellt.

III. PARAMETRISCHE METHODEN

Parametrische und nichtparametrische Methoden zur Glättung von Bewegungssignalen unterscheiden sich im Verhältnis der Anzahl übergebener und gesuchter Parameter. Während im parametrischen Fall schon einiges über das Signal bekannt ist und nur noch wenige Unbekannte zu bestimmen sind, hat man im nichtparametrischen Fall genau die umgekehrte Situation. Im ersten Fall formuliert man meist ein mathematisches Modell, mit dem das Schätzen der Parameter auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A\vec{a} = \vec{y} \quad (4)$$

zurückgeführt werden kann, wobei \vec{a} der zu schätzende Parametervektor ist (Dimension m), \vec{y} die abgetasteten Werte enthält (Dimension n) und die Matrix A das mathematische Modell beschreibt (Dimension $n \times m$ mit $n \gg m$). Als Beispiel sei hier ein verrauschter Datenvektor $\vec{y} = \vec{x} + \vec{\epsilon}$ gegeben, wobei \vec{x} das ideale Signal repräsentiert und $\vec{\epsilon}$ den Rauschanteil darstellt. Für diesen Datenvektor \vec{y} ist nun

eine optimale Parabel, beschrieben durch die reelle Funktion

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (5)$$

zu finden. Das lineare Gleichungssystem hat dann folgende Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Das daraus resultierende Gleichungssystem hat allerdings keine direkte Lösung, da sich das abgetastete Signal aus dem reinen Signal und Rauschen zusammensetzt ($\vec{y} = \vec{x} + \vec{\varepsilon}$). Bei unkorreliertem Rauschen treffen aber meist gewisse stochastische Eigenschaften zu, d.h. der Erwartungswert $\mathbf{E}(\vec{\varepsilon}) = 0$ und die (evtl. empirische) Kovarianzmatrix $N = \mathbf{E}(\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}^\top) = ((\mathbf{C}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)))$ des Rauschens ist regulär. Dann ergibt sich eine beste lineare Annäherung (*best linear unbiased estimate – blue*) mit

$$\hat{\vec{a}}_{\text{blue}} = (N_{\text{blue}} A^\top N^{-1}) \vec{y} \quad (7)$$

wobei

$$N_{\text{blue}} = (A^\top N^{-1} A)^{-1}.$$

Die Rausch-Kovarianzmatrix N ist in vielen Fällen bis auf einen Faktor bekannt, der Residuenvarianz:

$$\hat{\sigma}_{\text{res}}^2 = \frac{\|\hat{\vec{\varepsilon}}\|^2}{(n-m)} \quad (8)$$

mit dem Schätzfehler

$$\hat{\vec{\varepsilon}} = (I - A(N_{\text{blue}} A^\top N^{-1})) \vec{y}.$$

Die Residuenvarianz $\hat{\sigma}_{\text{res}}^2$ kann auch als Verteilung der Fehlerquadrate der Annäherung auf die Zahl der Unbekannten $(n-m)$ interpretiert werden (mittlere Fehlerstärke pro Unbekannte).

Die Varianzen $\mathbf{V}(a_i)$ der Annäherung können allerdings noch sehr hoch sein, je nachdem wie stark das Rauschen ist. In diesem Fall ist es sinnvoll die Daten vorher einer Tiefpassfilterung zu unterziehen (vgl. Abschnitt IV-A) und/oder einige Beschränkungen des resultierenden Parametervektors festzulegen (*bias*), indem die Bedingung

$$C\vec{a} = \vec{0} \quad (9)$$

zu erfüllen ist. C ist hierbei eine $k \times m$ -Matrix, die k Bedingungen beschreibt ($k < m$). Im Fall der Parabel aus Gleichung 5 könnte dies z.B. die Kenntnis einer Nullstelle sein.

Diese Beschränkungen sollten allerdings mit einem Faktor α ($0 < \alpha < 1$) gewichtet werden, da das System trotzdem eine gute Annäherung liefern soll, auch wenn diese Beschränkungen nicht zutreffen. Als resultierende Parameter-Schätzung erhält man dann

$$\hat{\vec{a}}_{\text{biased}} = (A^\top N^{-1} A + \alpha C^\top C)^{-1} A^\top N^{-1} \vec{y}. \quad (10)$$

Ansätze, wie der Gewichtungsfaktor α optimal zu wählen ist, beschreiben die Abschnitte IV-B und IV-C.

IV. NICHTPARAMETRISCHE METHODEN

Beispiele nichtparametrischer Methoden zur Glättung verauschter Daten, bei denen eine große Anzahl von Parametern bei nur wenigen gegebenen Daten zu finden ist, sind u.a. Standardmethoden der digitalen Signalverarbeitung sowie Verfahren mittels Spline-Glättung.

A. Digitale Filter

Lineare Filter, die im Zeit- oder Frequenzbereich realisiert werden, eignen sich sehr gut im Fall von unkorreliertem, weißem Rauschen (*white noise*). Filter werden durch Faltung ihre Transferfunktion $h(t)$ mit dem Eingangssignal im Zeitbereich angewendet:

$$x(t) = y(t) * h(t), \quad (11)$$

$$x^{(n)}(t) = y(t) * h^{(n)}(t), \quad (12)$$

wobei $y(t)$ die abgetasteten Werte und $x(t)$ das gefilterte Signal repräsentieren. Durch die Eigenschaft der Faltung reicht es aus das Eingangssignal mit der n -ten Ableitung der Transferfunktion zu falten, um die n -te Ableitung des Signals zu erhalten (Gleichung 12). Wird auf das abgetastete Signal die schnelle Fouriertransformation (*fast fourier transformation – FFT*) angewendet, wird die Fouriertransformierte der Transferfunktion des Filters an das Signalspektrum multipliziert (Faltung im Zeitbereich entspricht der Multiplikation im Frequenzbereich):

$$X(\omega) = Y(\omega) \cdot H(\omega), \quad (13)$$

$$\mathbf{F}(x^{(n)})(\omega) = Y(\omega) \cdot (i\omega)^n H(\omega). \quad (14)$$

Die zeitlichen Ableitungen der gefilterten Daten $x^{(n)}(t)$ lassen sich dann über ihre jeweilige Fouriertransformation $\mathbf{F}(x^{(n)})(\omega)$ bestimmen (inverse FFT). Die Wirkungsweise vieler Filter lässt sich zudem oftmals auch als lineares Gleichungssystem

$$\vec{x} = A_h \vec{y} \quad (15)$$

im Zeitbereich effizient umsetzen bzw. approximieren.

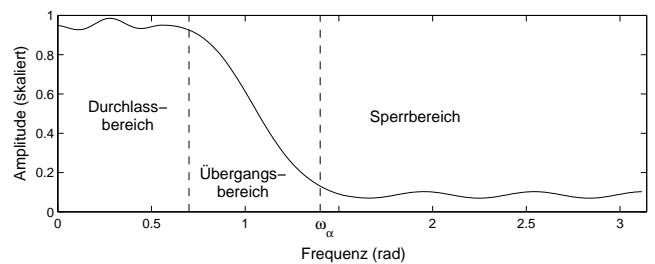


Abbildung 4. Untergliederung eines Signalspektrums in Durchlassbereich (*band pass*), Übergangsbereich (*transition band*) und Sperrbereich (*stop band*).

Ein ideales Tiefpassfilter, das also das Signal bis zu einer Sperrfrequenz ω_α im Durchlassbereich (*band pass*) unverändert lässt und alle höheren Frequenzen auf 0 setzt (vgl. Abschnitt II-D), würde so aussehen:

$$H_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega < \omega_\alpha \\ 0 & \text{für } \omega > \omega_\alpha \end{cases} \quad (16)$$

Ein doppeltes (vorwärts/rückwärts) Butterworth-Filter mit der Transferfunktion

$$H_\alpha(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_\alpha)^{2n}} \quad (17)$$

versucht den Übergangsbereich (*transition band*), in dem der gewünschte Signalanteil abnimmt, zu minimieren, indem der Signalverlauf im Durchlassbereich maximal abgeflacht wird (Abbildung 5). Die Stärke der Änderung kann hierbei durch seine Ordnung n gesteuert werden. Bei einem großen Übergangsbereich eignet sich dieses Filter allerdings nicht, da dann das Signal zu sehr verändert wird.

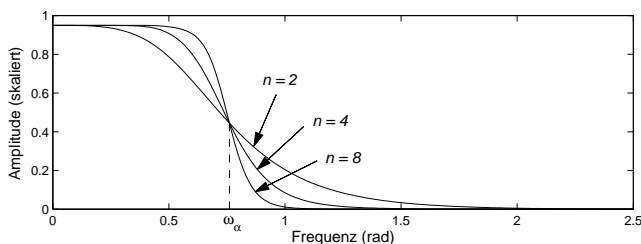


Abbildung 5. Charakteristik eines Butterworth-Filters n -ter Ordnung.

Das Wiener-Filter mit der Transferfunktion

$$H(\omega) = \frac{S(\omega)}{S(\omega) + N(\omega)} \quad (18)$$

eignet sich gut, wenn Kenntnisse über das Signalspektrum $S(\omega)$ und das Rauschspektrum $N(\omega)$ vorhanden sind. Allerdings kann sich dieses Filter auch ungünstig auswirken, z.B. wenn das abgetastete Signal nur in einem kurzen Intervall einen hochfrequenten Spitzenwert (*peak*) hat, da dieser sich im Gesamtspektrum kaum auswirkt, aber für die Analyse des Signals wichtig ist.

Weitere gute Filter sind in jedem Standardwerk zur digitalen Signalverarbeitung zu finden, wie z.B. von OPPENHEIM und SCHAFER [2]. Die meisten Filter verlangen aber noch die Angabe der Sperrfrequenz oder eines Parameters α , der unmittelbar mit der Sperrfrequenz zusammenhängt.

B. Generalized Cross-Validation (GCV)

Einen Ansatz, diesen Regularisierungsparameter α zu finden, bietet das GCV-Verfahren (*generalized cross-validation*). Die grundsätzliche Idee dabei ist es, für solch einen gegebenen Parameter α eine Funktion auf alle Datenpunkte bis auf den k -ten zu finden (für alle $k = 1 \dots n$). Die die Summe der Quadrate der jeweiligen Vorhersagefehler ε_k an den interpolierten Stellen bildet dann den *Root-Mean-Square-Fehler* (RMS). Dies wird für verschiedene α durchgeführt und resultiert dann in einem α , für welches dieser RMS-Fehler am geringsten ausfällt.

Im Frequenzbereich hat dies seine Entsprechung, wobei sich hier die mittlere Fehlerstärke pro Frequenzbereich durch die Residuenvarianz

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{\omega_{\text{sperr}}} \int_0^{\omega_N} (E_\alpha(\omega))^2 d\omega \quad (19)$$

bestimmen lässt. Hierbei ist

$$E_\alpha(\omega) = Y(\omega) \cdot (1 - H_\alpha(\omega))$$

das Fehlerspektrum und ω_{sperr} die Sperrbandbreite. Im Falle des idealen Tiefpassfilters aus Gleichung 16 ist $\omega_{\text{sperr}} = \omega_N - \omega_\alpha$ (Nyquistfrequenz minus Sperrfrequenz) und man erhält

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{\omega_N - \omega_\alpha} \int_{\omega_\alpha}^{\omega_N} (E_\alpha(\omega))^2 d\omega. \quad (20)$$

Man betrachte hier die Ähnlichkeit zu Gleichung 8. Die Anzahl der Frequenzbereiche, die durch das Filter laufen, kann also als Anzahl der zu suchenden Parameter interpretiert werden.

Wird das Filter als Matrix beschrieben (s. Gleichung 15), so erhält man hierfür

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{\|(I - A_\alpha)\vec{y}\|^2}{\text{Spur}(I - A_\alpha)}, \quad (21)$$

da beim idealen Tiefpassfilter die Spur von A_α der Anzahl der Frequenzbereiche entspricht, die vom Filter durchgelassen werden.

Die GCV-Funktion erhält man nun, indem man σ_α^2 in jeder Darstellung ein weiteres Mal durch die Sperrbandbreite bzw. durch die Anzahl der Unbekannten dividiert, also im Falle von Gleichung 21

$$\text{GCV}_\alpha = \frac{\|(I - A_\alpha)\vec{y}\|^2}{(\text{Spur}(I - A_\alpha))^2}. \quad (22)$$

Es wird nun jenes ω_α bzw. α gewählt, für welches die GCV-Funktion minimal ist.

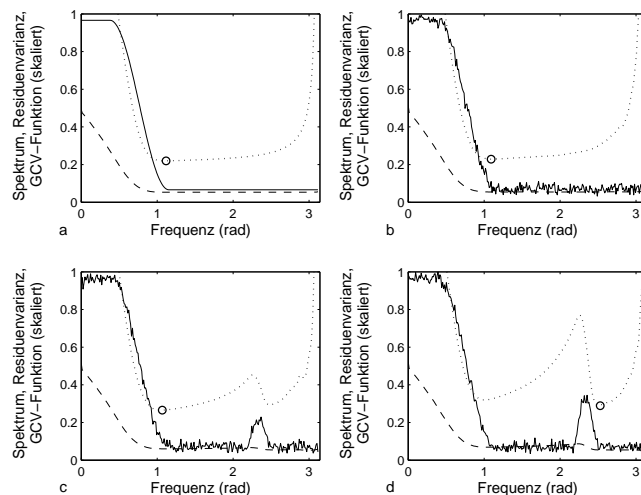


Abbildung 6. Spektrum eines (a) idealen Signals, (b) eines verrauschten Signals ohne HF-Spitzenwert, (c) mit leichtem HF-Spitzenwert und (d) mit starkem HF-Spitzenwert. Angegeben ist außerdem die Residuenvarianz σ_α^2 (gestrichelte Linie) und die GCV-Funktion (gepunktete Linie).

Aber auch die GCV-Funktion berücksichtigt nicht alle hochfrequenten Ausschläge, wie in Abbildung 6 zu sehen ist. Man muss also wieder entsprechend der jeweiligen Anwendung darauf achten, dass diese hochfrequenten Signalanteile durch die Glättung nicht verloren gehen, und gegebenenfalls manuell eine Entscheidung treffen.

C. Autokorrelation

CHALLIS beschreibt in [3] ein Verfahren, mit dem durch die Auswertung der Autokorrelationsfunktion der Residuen eine optimale Sperrfrequenz für einen Butterworth-Filter iterativ bestimmt werden kann. Dazu ist ein Startwert (z.B. 0,5 Hz) zu wählen, der solange in jedem Iterationsschritt erhöht wird (z.B. um 0,1 Hz), bis das Ergebnis der Autokorrelation annehmen lässt, dass die Residuen fast nur noch aus weißem Rauschen bestehen.

Die k -te Autokorrelationsfunktion

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (\varepsilon_i - \mathbf{E}(\varepsilon))(\varepsilon_{i+k} - \mathbf{E}(\varepsilon))}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \mathbf{E}(\varepsilon))^2} \quad (23)$$

liefert den Korrelationskoeffizienten bei einer Verschiebung der Datenreihe um k . Im Fall $k = 0$ nimmt sie ihr absolutes Maximum an (keine Verschiebung). Gibt es im Signal Periodizitäten beliebiger Form, dann wird bei Verschiebungen um Vielfache der Periodendauer der Funktionswert der Autokorrelation jeweils ein lokales Maximum annehmen. Um nun festzustellen, ob eine Datenreihe unkorreliert ist, reicht es meist aus zu prüfen, ob ein gewisser Toleranzwert ($< 10\%$ von r_0) bei der ersten Verschiebung ($k = 1$) unterschritten wird.

Im Gegensatz zur GCV-Funktion werden bei diesem Verfahren Signalanteile im Hochfrequenten stärker berücksichtigt (Abbildung 7). Obwohl das gute Ergebnisse für die Ableitungen des Signals liefert, neigt es aber leicht zum „Überglätten“ der Daten (gewählte Sperrfrequenz zu niedrig). Je nach Intensität des Rauschens kann die Sperrfrequenz aber auch zu hoch ausfallen.

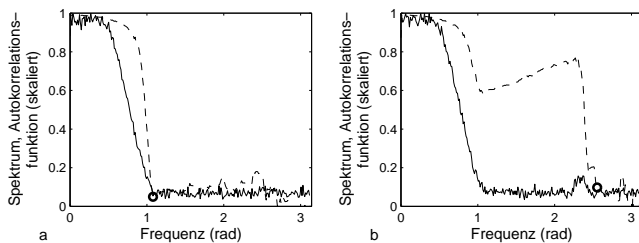


Abbildung 7. Spektrum eines verrauschten Signals (a) ohne HF-Spitzenwert und (b) mit leichtem HF-Spitzenwert (durchgezogene Linien). Die erste Unterschreitung der Toleranzschwelle der Autokorrelationsfunktion (gestrichelte Linie) ist jeweils mit „o“ markiert.

D. Spline-Glättung

Ein weiterer Ansatz zur Glättung von Daten ist die Spline-Glättung. Hierbei wird versucht ein Spline $h(t)$ m -ter Ordnung über alle Datenpunkte zu legen und dabei eine geringstmögliche Abweichung an den Abtaststellen zu erreichen. Bei der vorliegenden Spline-Methodik wird dabei der vorangegangene, der aktuelle und der folgende Datenwert genutzt, um den Wert an der aktuellen Stelle zu approximieren. Aus diesem Grund sind für die Randstellen am Anfang und am Ende der Signaldatenreihe zusätzliche Bedingungen erforderlich. Ein natürlicher Spline m -ter Ordnung fordert beispielsweise, dass die k -ten Ableitungen 0 sind für

alle $k = m \dots (2m - 2)$. Um eine Verfälschung der Daten an den Randstellen zu vermeiden, ist es also sinnvoll, die Ordnung des Splines höher zu wählen als die Anzahl der gewünschten Ableitungen.

Da z.B. bei einem Positionssignal meist noch die Geschwindigkeit (erste Ableitung) und die Beschleunigung (zweite Ableitung) von Interesse sind, sollte man in diesem Fall $m \geq 5$ wählen. Die Spline-Glättung ist also ein Kompromiss zwischen der möglichst exakten Approximation an den Datenpunkten und den (α -gewichteten) Nebenbedingungen an die m -te Ableitung. Daraus ergibt sich eine Kostenfunktion, die es zu minimieren gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |h(y_i) - y_i|^2 + \alpha \int \left| \frac{\partial^m}{\partial t^m} h[y(t)] \right|^2 dt, \quad (24)$$

wobei $y_i := y(t_i)$.

Das GCVSPL-Paket von WOLTRING ([1]) macht sich die GCV-Funktion aus Gleichung 22 zunutze, um einen optimalen Regularisierungsparameter α zu finden, und liefert dann die Parameter eines passenden Splines zurück. Dabei können verschiedene Parameter übergeben werden, wie z.B. die Ordnung des gewünschten Splines (gerade Ordnungen bis hin zu Splines der Ordnung 10 = Polynom vom Grad 9) oder auch ein Startwert für den Parameter α . Es ist zudem möglich, einen benutzerdefinierten Wert für α vorzugeben. Die zu glättende Datenreihe kann dabei auch nicht-äquidistant abgetastet sein.

Die Resultate durch eine Spline-Glättung haben allerdings Ähnlichkeiten zu denen des Butterworth-Filters: Für harmonische Splines, die obige Kostenfunktion minimieren, und äquidistante Abtastwerte ergibt sich für die Fouriertransformierte $H(\omega)$ des Splines $h(t)$ die Transferfunktion des doppelten Butterworth-Filters aus Gleichung 17 mit $\omega_\alpha = (n\tau\alpha)^{-1/2m}$, wobei τ das Abtastintervall ist (Inverses der Abtastfrequenz).

V. SCHLUSS

Zur Filterung der Signaldaten, die bei der Akquisition von Bewegungsdaten anfallen, existieren bewährte Methoden aus der digitalen Signalverarbeitung. Ein Hauptproblem liegt jedoch darin, eine geeignete Sperrfrequenz zu finden, da die Bandbreite der Signale häufig variiert und die Signale unter Umständen kurze, hochfrequente Impulse enthalten. Gerade letztere können von Methoden, die versuchen eine solche Sperrfrequenz automatisch aus den Daten zu ermitteln, leicht „übersehen“ werden. Anwendungsspezifisch muss also immer die tatsächliche Bandbreite der Signaldaten berücksichtigt werden.

LITERATUR

- [1] H.J. Woltring, *Smoothing and Differentiation Techniques Applied to 3-D Data*, In: *Three-Dimensional Analysis of Human Movement*, S. 79–97, Human Kinetics, 1992
- [2] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, Oldenbourg Verlag München-Wien, 1999
- [3] J.H. Challis, *A Procedure for the Automatic Determination of Filter Cut-Off Frequency for the Processing of Biomechanical Data*, North American Congress on Biomechanics, 1998, <http://asb-biomech.org/onlineabs/NACOB98/230/>